

Capítulo 2

Conductores y Capacitores

2.1.	<u>Introducción</u>	2-2
2.2	<u>La Ley de Gauss y la irrotacionalidad del campo electrostático</u>	2-3
2.3	<u>Campo electroestático en las cercanías de un conductor</u>	2-6
2.4.	<u>Superficies equipotenciales</u>	2-8
2.5	<u>Los conductores y el principio de superposición</u>	2-10
2.6	<u>Varias configuraciones con conductores: a trabajar!!!</u>	2-19
	2.6.1 <i>Placa maciza en un campo electrico uniforme</i>	
	2.6.2 <i>Esfera maciza metalica cargada</i>	
	2.6.3 <i>Cáscara esférica conductora cargada</i>	
	2.6.4 <i>Cáscara esferica cargada con una carga en el centro</i>	
	2.6.5 <i>Dos cáscaras esféricas metálicas cargadas</i>	
	2.6.6 <i>Cáscara cilíndrica conductora cargada</i>	
	2.6.7 <i>Dos cáscaras cilíndricas conductoras cargadas</i>	
	2.6.8 <i>Dos cáscaras cilíndricas metálicas concéntricas cargadas con distintas cargas con una distribución lineal de cargas</i>	
2.7	<u>Puntas agudas en conductores</u>	2-19
2.8	<u>Cargando metales: las pilas</u>	2-22
2.9	<u>Los capacitores</u>	2-23
	2.9.1 <u>Ejemplos a resolver</u>	2-27
	2.9.2 <u>Para qué sirven los capacitores</u>	2-27
	2.9.3 <u>El trabajo necesario para cargar un capacitor.</u>	2-30
	2.9.3 <u>La fuerza entre placas de un capacitor. (fuera de programa)</u>	2-30

2.1 Introducción

Hasta ahora estudiamos los campos eléctricos creados por distribuciones de carga en “la nada”. No había materia, tenemos un tipo de material (que llamaremos material conductor) sometido a campos eléctricos creados por cargas o distribuciones de ellas, o cuando las cargas “se introducen” (por algún mecanismo) en cuerpos conductores.

Partimos del siguiente resultado experimental: *nunca se pudo medir en una situación electrostática* un campo eléctrico dentro de un conductor. Es decir, si por ejemplo se coloca un cuerpo conductor (llamado “el conductor”) en un campo eléctrico uniforme \vec{E}_{ext} , los electrones del metal se mueven de forma tal que el campo se deforma y, además, resulta nulo dentro del conductor (Figura 1)

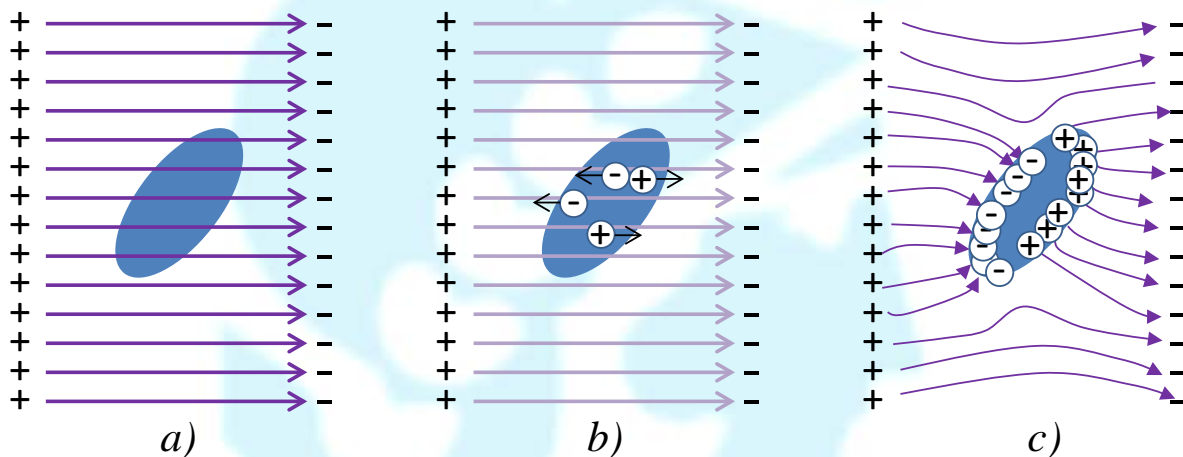


Fig. 1- a) muestra donde es colocado el conductor y dibujo de líneas de campo como si el objeto no tuviera características eléctricas, b) cómo se redistribuyen las cargas en el mismo, c) dibujo de las líneas de campo deformadas

Veamos que el modelo de electrón libre resulta adecuado para describir este comportamiento. Si en las moléculas de un conductor existen uno o más electrones libres de moverse, el campo eléctrico externo hará que éstos se desplacen y reacomoden en una configuración tal que el campo dentro del conductor resulte nulo. Si “quedara” algún campo eléctrico interno, éste haría que los electrones se movieran hasta que se llegara al equilibrio.

Como consecuencia, podemos decir que **los conductores no tienen campo estático interno**. Al movimiento de cargas en respuesta a campos eléctricos aplicados se lo llama **Inducción Eléctrica** (más adelante veremos otro tipo de Inducción llamada Electromagnética). En la Fig. 1 vemos que algunos electrones se mueven hacia la izquierda, dejando una deficiencia de ellos a la derecha. Así, con este modelo de electrón libre podemos

pensar que esta disposición de cargas positivas y negativas crea dentro del conductor un campo \vec{E}_{int} tal que $\vec{E}_C = \vec{E}_{int} + \vec{E}_{ext} = 0$.

2.2 La Ley de Gauss y la irrotacionalidad del campo electrostático

Pero... ¿valdrá la Ley de Gauss en medios conductores? ¿Existe alguna distribución de las cargas dentro del conductor compatible con la Ley de Gauss?

Veamos: para cualquier superficie cerrada dentro del conductor

$$\Phi = \oiint_s E_c ds = 0 \quad (1)$$

pues el campo es nulo en el interior. En consecuencia, si consideramos que los electrones viajaron hacia la izquierda dejando con exceso de carga positiva a las moléculas de la derecha y todas están ubicadas en la superficie externa del conductor, tendremos que la carga encerrada en cualquier superficie *interna* es nula. Por lo tanto, al considerar que las cargas se distribuyen en la superficie, la Ley de Gauss será válida también en medios materiales conductores. (Traten de pensar si existe alguna otra distribución de cargas que pudiera cumplir con la condición experimental de campo nulo dentro de un conductor en condiciones electrostáticas y con la Ley de Gauss al mismo tiempo).

Tomaremos al resultado experimental de no poder medir (y por lo tanto, encontrar) campos eléctricos en conductores en situaciones electrostáticas como **una ley experimental**. Esta experiencia transformada en ley y el consecuente modelo de electrón libre, nos dará una descripción del comportamiento de cargas en conductores cuando hay cargas dentro o fuera de ellos.

Entonces, sabemos que:

- 1) $\vec{E}_C = 0$ en condiciones electrostáticas
- 2) Los electrones tienen libertad de moverse dentro de un conductor.
- 3) Estas dos condiciones son compatibles con la Ley de Gauss postulando que las cargas se distribuyen en la superficie externa del conductor (Fig.2).

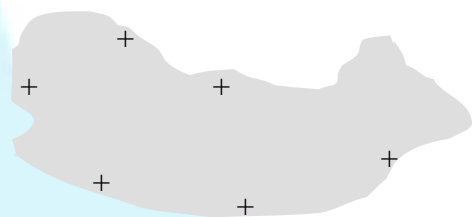


Fig.2. Distribución de cargas en un conductor

Veamos qué ocurre cuando se agrega una carga Q (por un mecanismo cualquiera) a un conductor originalmente neutro. Independientemente de la forma del conductor, para que se cumplan 1), 2) y 3) el exceso de carga al llegar al equilibrio debe estar distribuida sobre la superficie externa. Y esto será independiente también de que la carga sea positiva o negativa.

Tema especial 1

Todo lo que dijimos hasta ahora lo aplicamos a conductores macizos. ¿Qué ocurre si hacemos las mismas experiencias pero con conductores con una “burbuja” de vacío? Supongamos primero que tenemos un conductor con una burbuja y se le agrega una carga Q (no habiendo cargas dentro de la burbuja) (Figura 3). ¿Cómo se distribuye Q ?

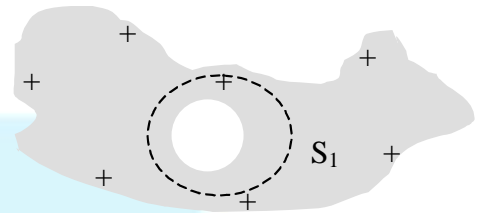


Fig.3. Conductor con una burbuja en su interior

Si aplicamos la Ley de Gauss a cualquier superficie cerrada S_1 que incluya a toda la burbuja (Fig.4), el flujo Φ a través de S_1 será nulo porque el campo eléctrico es nulo (S_1 está dentro del conductor). En consecuencia, la **carga neta** encerrada en S_1 será nula. En este caso, la Ley de Gauss nos “asegura” que la carga neta es nula pero no nos asegura que no haya una distribución de cargas sobre la superficie de la burbuja (aunque la carga neta sea nula). Por ejemplo, que haya un exceso de cargas positivas en un lado y negativas en otro de forma tal que el campo no sea nulo en la burbuja.

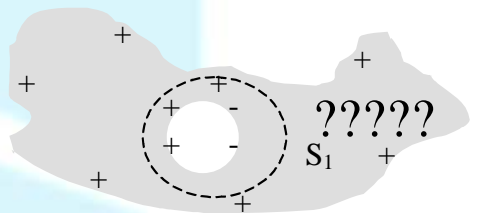


Fig.4. ¿Cómo se redistribuye la carga en el interior?

Si tomamos una superficie que limite un volumen que en parte incluye al conductor y en parte a la burbuja (Fig.5)

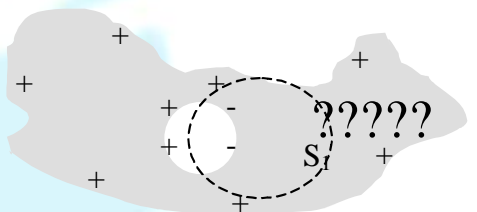


Fig.5. ¿Cuál debo considerar como distribución acertada?

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}_c \cdot d\vec{s} = \oiint_{S_c} \vec{E}_c \cdot d\vec{s} + \oiint_{S_B} \vec{E}_c \cdot d\vec{s} = 0 = \frac{Q_{encS}}{\epsilon_0} \quad (2)$$

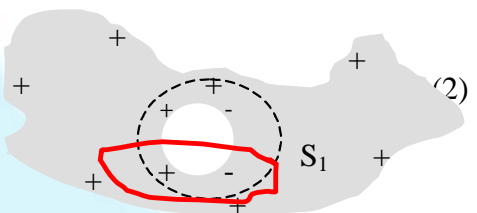


Fig.6. Circulación general, con un tramo en el conductor y otro en la burbuja

Es decir, aunque tomemos muchas superficies diferentes, no sabemos cuánto vale la carga encerrada en ninguno de los casos y tampoco el campo. Veamos por qué NO es posible que el campo sea distinto de cero dentro de la burbuja en este caso. Debemos pensar en “la otra Ley”, la que refleja que los campos electrostáticos son conservativos:

$$\text{rot}(\vec{E}) = 0 \text{ en forma diferencial o } \oint_{\text{curva}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ en forma integral}$$

Tomemos una curva cerrada C lo más genérica posible: un tramo estará en el conductor C_{cond} y otro en la burbuja C_{burb} (Figura 6). La circulación del campo eléctrico está dada por

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{C_{cond}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_{C_{burb}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

El primer término del segundo miembro es siempre nulo porque el campo en el conductor es nulo. Pero, como consecuencia, el segundo término también lo debe ser para todo camino L_B dentro de la burbuja. La única posibilidad, entonces es que

$$\vec{E}_{burb} = 0 \quad (4)$$

¿Qué pasaba si colocábamos un conductor hueco descargado en un campo eléctrico externo?. Haciendo los mismos razonamientos que en el caso del conductor hueco cargado, llegamos a que el campo electrostático dentro de la burbuja es nulo.

Hemos llegado a un resultado muy interesante: los conductores pueden “aislar” regiones del espacio; podemos tener regiones del espacio libres de campos electrostáticos!! A esto se lo llama **blindaje electrostático**: si una cavidad está totalmente encerrada dentro de un conductor, **ninguna** distribución estática de cargas en el exterior puede producir campos eléctricos en el interior¹.

Nos faltan plantear muchas otras situaciones de cargas en presencia de conductores. Veamos otra de ellas: el mismo conductor descargado con una burbuja pero se coloca una carga Q en la burbuja (Figura 7).

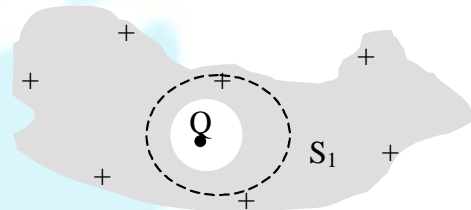


Fig.7. Burbuja en un conductor con una carga en su interior

Si aplicamos la Ley de Gauss tomando una superficie dentro del conductor que incluya a toda la burbuja, el flujo a través de ella debe ser cero porque el campo eléctrico es nulo en la superficie

(por estar dentro del conductor) y, como consecuencia, la carga neta encerrada también debe ser cero

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}_c \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (5)$$

¹ Cuando consideramos situaciones no electrostáticas, podemos hablar también de blindaje. Por ejemplo, si colocamos una radio dentro de una Jaula de Faraday, no la podremos escuchar porque no pueden penetrar las ondas de radio dentro de la Jaula.

Pero... la carga neta encerrada ¿es la carga Q solamente???? Podemos pensar, entonces, que sobre la superficie interna de la burbuja se indujo una carga $-Q$ (distribuida de alguna manera) de forma tal que se cumpla la ley experimental de no encontrar campos eléctricos en condiciones electrostáticas y también se cumpla la Ley de Gauss. ¿Cuánto vale el campo eléctrico dentro de la burbuja \vec{E}_B ? ¿Podemos saber si es o no nulo? Aplicando la Ley de Gauss a una superficie que encierre **parte** de la burbuja, tendremos

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}_c \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_B} \vec{E}_c \cdot d\vec{S} + \oiint_{S_e} \vec{E}_B \cdot d\vec{S} = 0 + \oiint_S \vec{E}_B \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc\ por\ S}}{\epsilon_0} \quad (6)$$

Pero en este caso, no sabemos cuánto vale la carga neta pero sí que no es nula (para que sea nula la superficie debe encerrar toda la burbuja, es decir, estar toda en el conductor. Es decir, $\Phi \neq 0$ si la superficie no encierra a toda la burbuja y su valor dependerá de cuál sea la superficie. Esto lleva a que $\vec{E}_B \neq 0$.

Apliquemos otra vez la Ley que refleja que el campo electrostático es conservativo. Tendremos que

$$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = \oint_{\ell_c} \vec{E}_c \cdot d\vec{l} + \oint_{\ell_B} \vec{E}_B \cdot d\vec{l} \quad (7)$$

Nuevamente el primer término del segundo miembro es nulo y por lo tanto el segundo también. ¿Es compatible $\vec{E}_B \neq 0$ con $\int_{\ell_B} \vec{E}_B \cdot d\vec{l} = 0$? Es decir, ¿puede ser que la “circulación” del campo electrostático a través de un camino cualquiera que va desde un punto de la superficie de la burbuja a otro punto cualquiera de la superficie de la burbuja sea nula?. La respuesta es ¡¡SÍ!!..Podríamos demostrarlo matemáticamente, pero preferimos hacerlo a través de la física del problema. Para ello, deduciremos primero algunas otras propiedades de los conductores cargados o inmersos en campos electrostáticos.

Fin tema especial 1

2.3 Campo electrostático en las cercanías de un conductor

De la descripción realizada podemos sacar una conclusión muy importante que se refiere a cómo son los campos electrostáticos inmediatamente fuera de un conductor. Si sobre la superficie del conductor hubiera una componente tangente a la superficie, las cargas (que están ubicadas en la superficie, como hemos visto) “reaccionarían” ante el campo (es decir sufrirían una fuerza y se moverían). En ese caso estamos contradiciendo nuestra hipótesis inicial de equilibrio. En consecuencia, la única posibilidad es que el campo

electrostático tenga solamente dirección perpendicular a la superficie (es decir, paralelo al diferencial de superficie). Pero, ¿cuánto vale el campo eléctrico en la superficie de un conductor? ¿Puede tomar cualquier valor? ¿De qué depende?

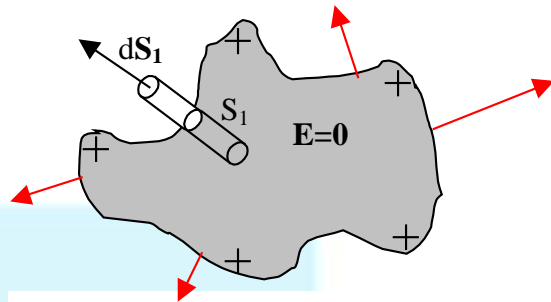


Fig.8. Esquema de la ley de Gauss en las cercanías de la superficie de un conductor

Hallemos el flujo a través de una superficie (recordar que debe ser cerrada) como la indicada en la Figura 8

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_1} E dS = \frac{Q_{enc.}}{\epsilon_0} = \frac{\iint_{S_1} \sigma dS}{\epsilon_0} \quad (8)$$

Como esto es válido en toda la superficie del conductor, valdrá, en general

$$E_{sup} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{Módulo del campo en la superficie externa de un conductor}$$

Veamos unos ejemplos:

1) Esfera conductora de radio R cargada con Q (necesariamente debe tener carga distribuida uniformemente por razones de simetría). $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ El campo producido

$$\text{por esta distribución es } E(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r} & r > R \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{Vemos que en la frontera } (r=R) \text{ se cumple que } |\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (10)$$

2) Plano conductor (cargado uniformemente por los mismos motivos que en el caso de la esfera). En el caso de una distribución superficial de carga uniforme σ sabemos que el campo eléctrico es uniforme en cada semi-espacio, teniendo un módulo dado por

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (11)$$

siendo su dirección perpendicular al plano y su sentido dependiente de que la densidad sea

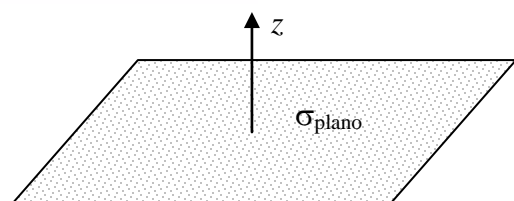


Fig.9. Plano cargado uniformemente 2-7

positiva o negativa y del semi-plano en estudio. Es decir

$$\vec{E} = \frac{\sigma_{plano}}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \hat{z} \quad (12)$$

Pensemos ahora un conductor plano infinito. Debe tener un espesor porque es de material. Y supongamos que lo cargamos con una carga Q (que debe ser infinita porque la superficie es infinita). ¿Dónde se distribuyen las cargas? Como el campo dentro del conductor es nulo las cargas se distribuirán mitad en la superficie superior y mitad en la inferior. Supongamos que de ahí resulta que la densidad superficial es σ en ambas caras. Aplicando la Ley de Gauss obtenemos que el campo vale

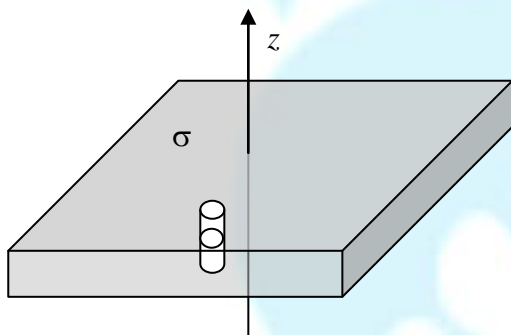


Fig.10. Placa conductora cargada
(en superficie porque es conductora)

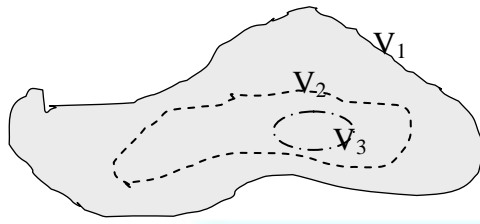
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{en el conductor} \\ \frac{\sigma_{cond}}{\epsilon_0} \text{sgn}(z) \hat{z} & \text{fuera del conductor} \end{cases} \quad (13)$$

Es decir, vale el doble que lo que vale en el caso de una distribución plana con la misma densidad superficial. Se puede pensar como que en el primer caso $\sigma_{plano} = Q_{plano}/A$ mientras que en el

caso del conductor $\sigma_{conductor} = Q_{conductor}/A$. Para que los campos tengan la misma magnitud, debe ser $Q_{plano}/2 = Q_{conductor}$. Bueno, sumando la carga superior e inferior del conductor plano, nos da ese resultado. Es decir, si tenemos una carga Q distribuida en forma plana, el campo generado será $Q/2A\epsilon_0$. Si esa misma carga se usa para cargar al conductor plano, la carga sobre cada superficie será $Q/2$. Y el campo generado será $Q/2A\epsilon_0$. También se puede pensar que para una dada densidad superficial, el número de líneas en el caso del plano conductor debe ser el doble porque no hay líneas hacia adentro del conductor.

2.4 Superficies equipotenciales

Sabemos que el campo es nulo dentro de un conductor, independientemente de que haya campos electrostáticos externos o que el conductor esté cargado. Sabemos también que



el campo electrostático es perpendicular a la superficie de un conductor. Como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, las líneas equipotenciales deben ser siempre perpendiculares al campo eléctrico. Se sigue, entonces que la superficie de un conductor es una

equipotencial. Veamos ahora que TODO el conductor está al mismo potencial. Supongamos que hay superficies a diferentes potenciales. Entonces $-\text{grad}(V) \neq 0 \Rightarrow \vec{E} \neq 0$ (punto a punto) \Rightarrow **ABSURDO!!!**

Tema especial 2: Como un ejemplo de la información que nos da el saber que un conductor es una superficie equipotencial y que el campo en la superficie es perpendicular a la misma, tomemos un conductor plano infinito como el de la figura y acerquémosle una carga puntual q . Sabemos que el plano es una equipotencial y que las líneas de campo son perpendiculares en su superficie. Por otro lado sabemos que las líneas de campo eléctrico nacen en cargas positivas (y mueren en negativas). ¿A qué se parece esto? Fíjense que son las condiciones de un dipolo. Esto es un método que no veremos en Física II y que se llama **método de imágenes** (por su parecido con un espejo). Se calcula el campo como si fuera un dipolo y luego se dice que es válido solamente a la izquierda de nuestro esquema.

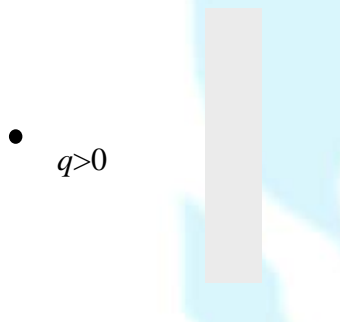
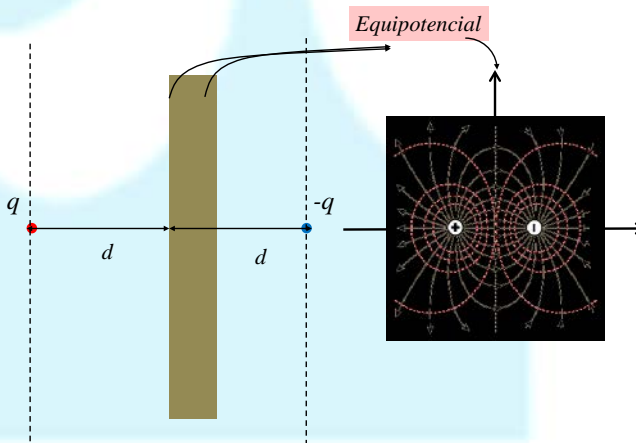


Fig.11. Plano conductor infinito y carga q

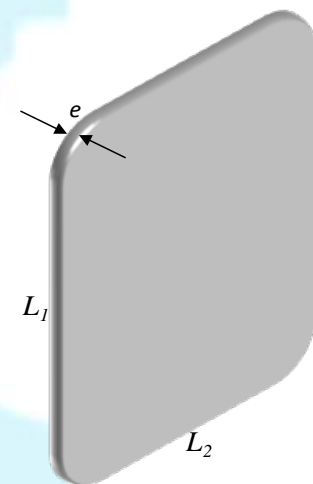


Fin tema especial 2

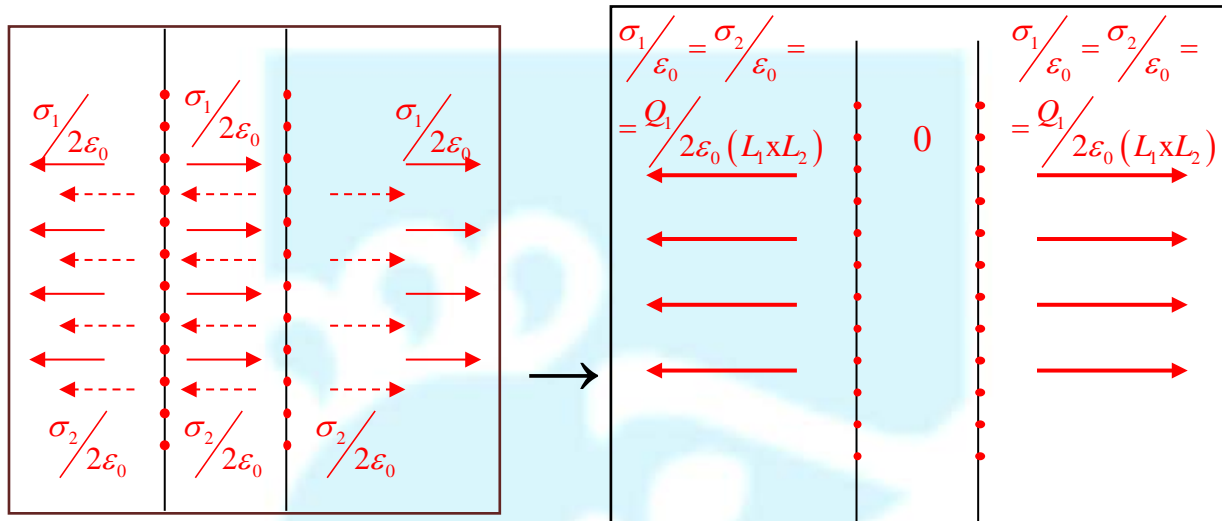
2.5 Los conductores y el principio de superposición

Estamos habituados a usar el Principio de Superposición con fuerzas sobre cuerpos o cargas que no afectan a las características o propiedades del cuerpo. Pero ¡¡¡¡ CUIDADO!!!! No siempre es así. Hasta ahora (Electrostática en vacío) consideramos que la presencia de una nueva distribución de cargas no afectaba a la otra distribución en el sentido de reordenar la configuración original (ni que la distribución original afectaba a la nueva). Con el modelo de conductores (y el del electrón libre) el Principio de Superposición se vuelve complicado y, en general, no es posible usarlo sin ser muy cuidadoso. Sigue siendo válido pero el problema que se presenta es que cambian las distribuciones de carga y, como consecuencia, el campo generado por cada distribución resulta diferente que el campo generado por cada distribución cuando no interactuaban. ¿Por qué? Porque en condiciones estáticas, el campo dentro de un conductor debe ser nulo y eso requiere de una redistribución de cargas (podríamos decir que “siempre” aunque podemos encontrar alguna excepción).

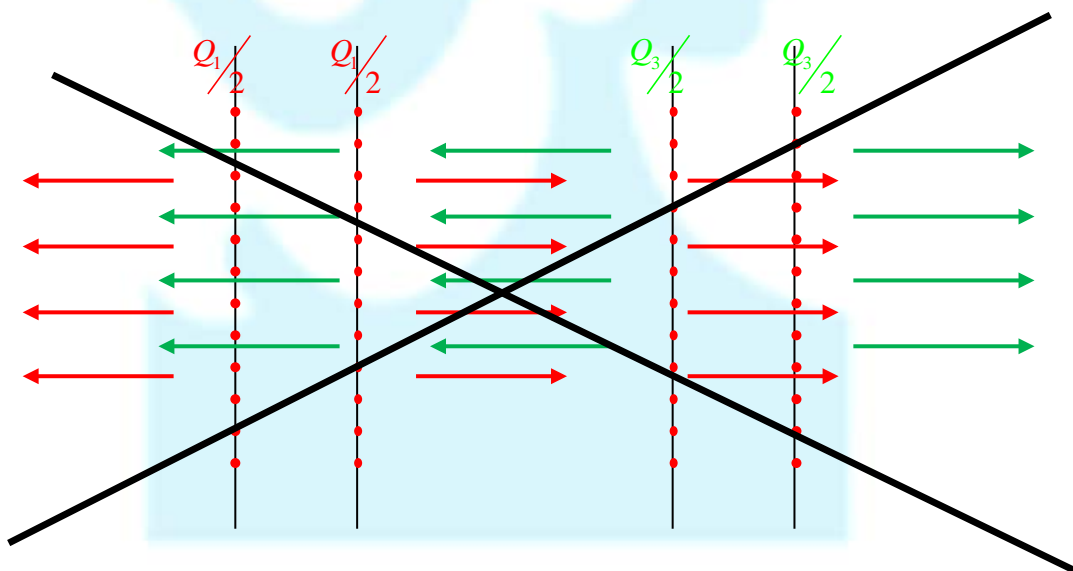
Veamos un ejemplo sencillo. Supongamos que tenemos una chapa metálica (que tiene espesor, por supuesto) de gran área aislada eléctricamente de cualquier distribución de cargas. ¿Qué significa “gran área”? Por ahora, no significa nada. Encontraremos su sentido en un minuto... Si esta chapa de dimensiones e , L_1 y L_2 es cargada con una carga Q_1 la carga se distribuirá de forma tal que **en el equilibrio** (después de pasado un tiempo llamado “transitorio”) el campo eléctrico sea nulo en su interior. ¿Cómo se distribuyen las cargas? Sobre su superficie. Pero, ¿cómo? No es fácil determinarlo excepto que hagamos un modelo sencillo en el que despreciemos lo que pasa cerca de los bordes. Es decir, considerar que la distribución de cargas es uniforme sobre las áreas laterales $L_1 \times L_2$ y nula en las áreas laterales $e \times L_1$ y $e \times L_2$. Así podemos considerar que en cada área lateral $L_1 \times L_2$ se distribuye uniformemente $Q_1/2$, i.e., tendremos $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{Q_1}{2(L_1 L_2)}$. De esta manera, el campo dentro del conductor resulta nulo, ya que tenemos 2 distribuciones de carga superficiales paralelas e



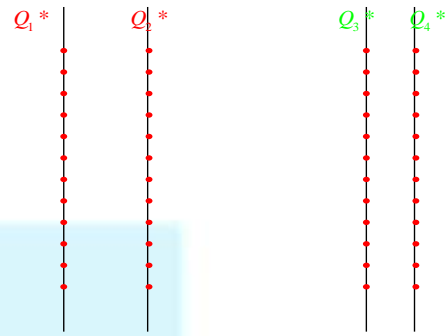
iguales (las flechas con línea sólida indica el campo creado por σ_1 y las de trazos por σ_2 .
Sumando los campos vectorialmente, obtenemos la figura de la derecha.



Si tuviéramos otra chapa **aislada** y de las mismas dimensiones pero cargada con una carga Q_3 tendríamos una situación equivalente. Es decir, $Q_3/2$ de una “lado” y $Q_3/2$ del otro. Veamos qué pasa si las acercamos. Supongamos (**erróneamente**) que las distribuciones de carga siguen siendo las mismas, es decir, sumamos los campos en las distintas regiones y obtenemos un ABSURDO: el campo eléctrico no resulta nulo dentro de los conductores (independientemente de su espesor). Lo que no puede suceder es, entonces:



¿Cómo deberían distribuirse las cargas? Por conservación de la carga, en cada conductor la carga total no puede variar (nunca se pusieron en contacto) o sea que será la original. Entonces debemos suponer que cada superficie está cargada (no puede haber cargas libres en los conductores) con cargas Q_1^* , Q_2^* , Q_3^* , Q_4^* y se debe cumplir:



1. $Q_1 = Q_1^* + Q_2^*$
2. $Q_3 = Q_3^* + Q_4^*$
3. $\vec{E} = 0$

en los conductores, i.e., debemos ver cuál es la contribución de las cargas sobre las cuatro superficies dentro de los conductores. En el conductor de la izquierda,

$$\vec{E} = \frac{Q_1^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} - \frac{Q_2^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} - \frac{Q_3^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} - \frac{Q_4^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} = 0$$

Y en el de la derecha

$$\vec{E} = \frac{Q_1^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} + \frac{Q_2^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} + \frac{Q_3^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} - \frac{Q_4^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} = 0$$

Es decir,

$$Q_1^* - Q_2^* - Q_3^* - Q_4^* = 0 \quad \text{y} \quad Q_1^* + Q_2^* + Q_3^* - Q_4^* = 0$$

Resolviendo las cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, resultan

$$Q_1^* = Q_4^* = \frac{Q_1 + Q_3}{2} \quad Q_2^* = \frac{Q_1 - Q_3}{2} \quad Q_3^* = -\frac{Q_1 - Q_3}{2}$$

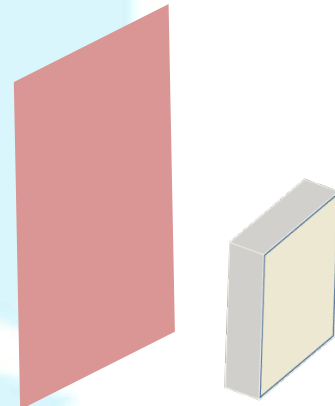
Ahora no está de más corroborar que el campo es nulo dentro de los conductores. ¿Cuánto vale el campo en todo el espacio? ¿Existe alguna combinación de cargas que haga nulo el campo entre los conductores? ¿Existe alguna combinación de cargas que haga nulo el campo en alguna otra zona del espacio?

Veamos otro ejemplo

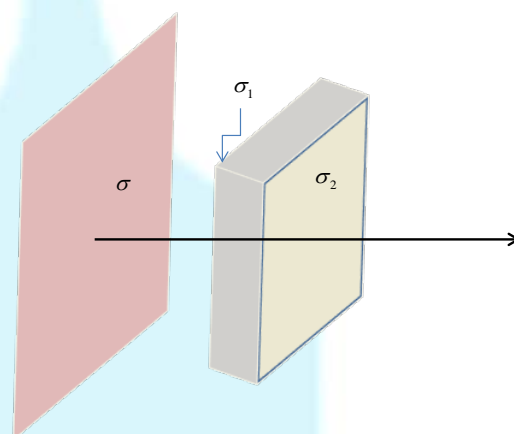
Se tiene una lámina cuadrada no conductora plana de área $A_1=20m^2$ con densidad uniforme de carga $\sigma=-2\mu C/m^2$. Próxima y paralela a ella, y a una distancia $d=0.3m$ se halla una placa metálica maciza cuadrada de área $A_2=10m^2$ y espesor $e=1mm$ con una carga $Q=10\mu C$ conocidos. Determine las densidades σ_1 (la más cercana a la lámina) y σ_2 en cada cara de la

placa y haga un gráfico que indique la diferencia de potencial entre un punto en la zona donde considere válida la aproximación de simetría “infinita” y un punto sobre la cara de la placa con densidad σ . ¿Cuál es la zona? Justifique dicha aproximación.

Lo primero que debemos hacer es un esquema para poder elegir un sistema de coordenadas adecuado para resolver el problema propuesto. No somos buenos dibujantes pero sería algo así. Pero, ¿cómo los ubicamos? Resolver este problema con consideraciones de efectos de borde es muy complicado. No es difícil calcular el campo eléctrico que genera la distribución plana finita (DPF) por separado (por integración). Y la distribución no cambiará aunque acerquemos otras distribuciones (porque la DPF no está sobre un conductor... son cargas “pegadas” uniformemente formando un cuadrado o puestas sobre un material que no permite el movimiento de cargas, i.e. un aislante o dieléctrico). Al acercarla a la placa P conductora (aunque esté descargada), P sufrirá el efecto del campo eléctrico que genera la DPF y sus cargas (libres de moverse dentro de la P) se comenzarán a ubicar de forma tal que en el estado de equilibrio (i.e. electrostático) el campo dentro de P sea nulo. Seguramente la distribución de cargas debe ser complicada. Sabemos que las cargas estarán sobre TODAS las superficies porque ya lo demostramos pero, vaya a saber cómo! Con las herramientas usadas en esta asignatura no será posible calcular la distribución exacta de cargas sobre la superficie de P.



Entonces, releemos el enunciado. La placa cuadrada tiene lados $L = \sqrt{A_2} \approx 3 \text{ m}$ y un espesor $e=1 \text{ mm}$. Es decir, aunque esté cargada (por cualquier motivo) podríamos considerar despreciable la carga sobre las cuatro superficies $L.e$. Si las ubicaciones relativas fueran las de la figura anterior, no podríamos asegurar que la distribución de

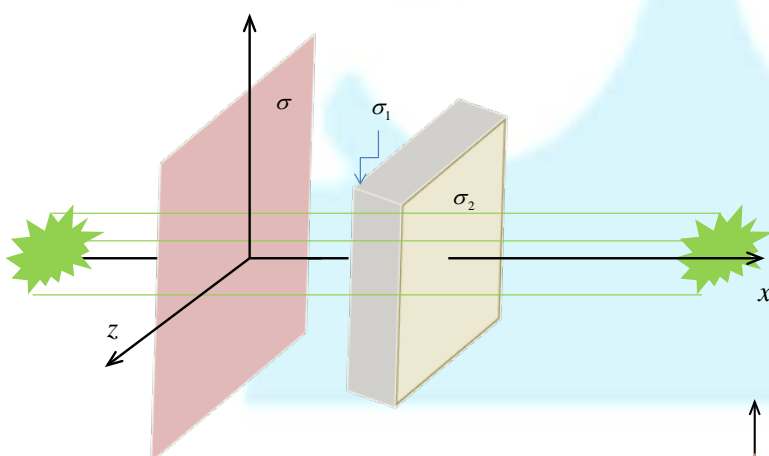


carga inducida sobre la P sea uniforme. Para que pueda ser considerado así, debemos asegurarnos que el campo eléctrico generado por la DPF en el espacio que ocupará la placa P sea uniforme y que los bordes de la P no intervengan. ¿Cómo lo logramos? Si ponemos a P y

DPF paralelas a las distribuciones y “en el medio”, vamos logrando cierta simetría. Y todo gracias a que el espaciamiento entre ellas es de 30 cm (por lo que hemos visto en el Capítulo 1, el campo generado por P podría ser considerado uniforme en el lugar donde se colocará P). Bajo estas condiciones, podemos decir que la distribución de cargas sobre las superficies “grandes” de P es uniforme. Eso no significa que podamos calcular el campo eléctrico ni la diferencia de potencial en “todo el espacio”. ¿Por qué lo decimos? Porque lo que calculemos (una vez que tengamos σ_1 y σ_2) será válido dentro de las suposiciones que hicimos. Es decir, “cerca” de las distribuciones en el sentido del eje dibujado y “lejos” de sus bordes. ¿Qué es “cerca” y “lejos”? En conjunto significa que lo que obtengamos será válido solo dentro de cierto valor de error que consideremos aceptable y que solo podríamos estimar si calculáramos el campo generado por las distribuciones sin despreciar efectos de borde. Y entonces.... ¿¿¿Para qué sirve todo?!?! Sirve para estimar órdenes de magnitud de densidades superficiales de carga, campos y diferencias de potencial: una aproximación a primer orden sin hacer cálculos complicados. Podríamos pensar dónde sería aceptable nuestra aproximación.

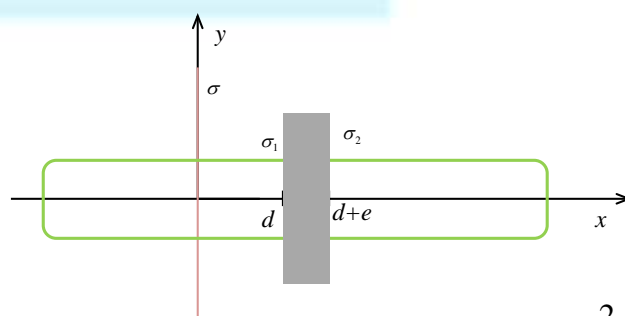
Entonces, podríamos intentar hacer el dibujo 3D, donde la zona “estrellada” indicaría los puntos del espacio donde nuestra aproximación no es tan mala (recordar que es un esquema...no está hecho a escala!!). Observen que habiendo hecho tantas suposiciones, podemos afirmar que las formas de la DPF y de P no importan. Podrían haber sido un círculo y un cilindro de base elíptica, respectivamente, porque despreciamos los efectos del borde: las consideraremos distribuciones infinitas.

Pero esto tiene simetría de revolución alrededor del eje x por lo que podemos hacer un dibujo



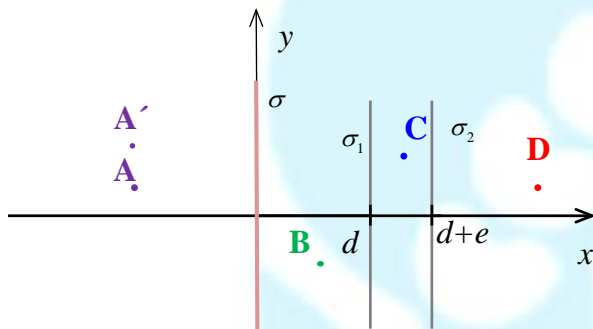
2D, lo que resulta mucho más amigable (por lo menos para nosotros). TENER en cuenta que la escala en la dirección x no es la misma que en la dirección y (y z , no dibujada).

Sabemos, por lo que ya demostramos que las cargas en la placa conductora se



ubicarán en su superficie. Como el problema enuncia que la DPF es negativa y la P está cargada positivamente, no es obvio cómo se distribuirán las cargas sobre P. **Si P estuviera descargada**, sería de esperar que sus cargas negativas móviles se movieran hacia la derecha, quedando la superficie ubicada en $x=d$ cargada positivamente y la superficie ubicada en $x=d+e$ con un plus de cargas negativas porque la placa P está aislada eléctricamente de cualquier objeto que le pueda transferir carga y la carga total final debe ser igual a la inicial. Es decir, la carga total debe ser cero.

Hemos convertido a este problema en uno aproximado, pero más simple. Sabemos que, una vez alcanzado el equilibrio, se llega a la condición estática en la que **el campo eléctrico dentro del conductor debe ser nulo**. La otra condición es que **la carga debe conservarse** en la placa porque está aislada eléctricamente. Además, vale el Principio de Superposición (¡ya todo está “quieto”, estamos en equilibrio!). Es decir, podemos calcular todo lo pedido



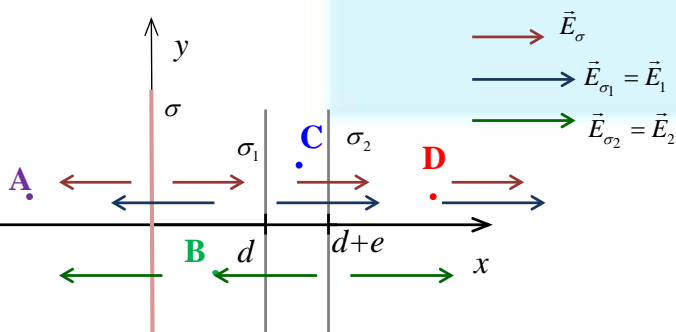
pensando que tenemos 3 superficies cargadas con distribuciones uniformes de carga como se indica en el esquema. Pasemos estas ideas a ecuaciones:

- 1) $\vec{E} = 0$ si $d < x < d + e$
- 2) $\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{A_2}$

Además, como los resultados son independientes de la coordenada y , lo que obtengamos para A valdrá para A'.

Para imponer que se cumpla 1), debemos calcular los campos generados por cada distribución, sumarlos y aplicar la condición de campo nulo en el punto C. Sabemos que están tentados en considerar de entrada que σ y σ_2 son negativos y σ_1 positivo (como sería en el caso en que P estuviera descargada). Sin embargo, para poder generalizar este problema a cualquier signo de σ y a que la carga total inicial en el conductor sea Q , es conveniente

plantear a todas las densidades como positivas, resolver el problema, reemplazarlos valores que son datos del problema y comprobar que se obtiene cuantitativamente lo previsto. Ya hemos visto que el campo eléctrico generado por una distribución



uniforme plana infinita de carga σ ubicada en el origen de coordenadas O vale

$\vec{E}(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{|x|}{x} \hat{x}$. Entonces, si para $d < x < d + e$, es decir, para todo punto del tipo C, el

campo eléctrico es nulo.

$$\begin{aligned} \vec{E}(x_C) &= \vec{E}_\sigma(x_C) + \vec{E}_1(x_C) + \vec{E}_2(x_C) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{|x - (-d)|}{x - (-d)} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \frac{|x - 0|}{x - 0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \frac{|x - (d + e)|}{x - (d + e)} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{|x + d|}{x + d} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \frac{|x|}{x} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \frac{|x - d - e|}{x - d - e} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} = 0 \end{aligned}$$

Es decir, $\sigma + \sigma_1 - \sigma_2 = 0$ por condición de campo nulo dentro del conductor y $\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{A_2}$

por conservación de la carga. Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$2\sigma_1 + \sigma = \frac{Q}{A_2} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{A_2} - \sigma \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 10^{-6} \text{C}}{10 \text{m}^2} + 2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right) = \frac{3}{2} 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = \frac{3 \mu\text{C}}{2 \text{m}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q}{A_2} - \sigma_1 = 1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} - \frac{3}{2} 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = -\frac{1}{2} 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = -\frac{1 \mu\text{C}}{2 \text{m}^2}$$

Es decir,

$$\sigma_1 = \frac{3 \mu\text{C}}{2 \text{m}^2} \quad \sigma_2 = -\frac{1 \mu\text{C}}{2 \text{m}^2}$$

Es interesante hacer el siguiente cálculo:

$$\sigma_2 = \frac{Q}{A_2} - \sigma_1 = \frac{Q}{A_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{A_2} - \sigma \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{A_2} + \sigma \right)$$

$$\sigma_1 = \frac{Q}{A_2} - \sigma_2 = \frac{Q}{A_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{A_2} + \sigma \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{A_2} - \sigma \right)$$

Podemos ver que, si la placa no hubiera estado cargada originalmente, σ_1 y σ_2 resultan (como hemos previsto) iguales y opuestas.

Si, en cambio, $Q=30\mu\text{C}$ y $\sigma=-2\mu\text{C}/\text{m}^2$, tanto σ_1 como σ_2 resultarían positivas. Podemos ver diferentes “casos”... Queda para ustedes.

Ahora debemos hacer un gráfico indicando la diferencia de potencial entre un punto “cualquiera del espacio” (donde sea válida la aproximación) y un punto sobre la cara de la placa con σ_1 . Antes de comenzar a hacer el cálculo, debemos tener en claro que la placa es una equipotencial por ser conductora (la justificación está en la teoría). En consecuencia, se

puede tomar cualquier punto de la placa como referencia. Lo haremos a partir de la definición de diferencia de potencial y luego analizaremos si fue la forma más conveniente para calcularlo. Como el campo eléctrico es conservativo, podemos tomar cualquier camino entre dos puntos. Además, como nuestra solución tiene validez en zonas donde el campo puede considerarse que solamente tiene componente en \hat{x} , tomaremos como camino una línea recta en la dirección de x

$$V(x) - V(x=0) = - \int_0^x \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

¿Cuál es el campo \vec{E} que debemos considerar? El campo que corresponde a la línea de integración. Debemos calcular el campo, entonces, en “todos los puntos del espacio”. Esto ya nos debe resultar sencillo porque podemos aplicar el principio de superposición a los campos eléctricos. Sabemos que

$$1) \quad \vec{E}_1 = \frac{1}{2\epsilon_0}(-\sigma - \sigma_1 - \sigma_2)\hat{x} = -\frac{1}{2\epsilon_0}\left(\sigma + \frac{Q}{A_2}\right)\hat{x} \text{ si } x < -d$$

$$2) \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma - \sigma_1 - \sigma_2)\hat{x} = \frac{1}{2\epsilon_0}\left(\sigma - \frac{Q}{A_2}\right)\hat{x} \text{ si } 0 < x < d$$

$$3) \quad \vec{E}_3 = \frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma + \sigma_1 - \sigma_2)\hat{x} = 0 \text{ si } d < x < d + e$$

$$4) \quad \vec{E}_4 = \frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma + \sigma_1 + \sigma_2)\hat{x} = \frac{1}{2\epsilon_0}\left(\sigma + \frac{Q}{A_2}\right)\hat{x} \text{ si } d + e < x$$

Entonces, para un punto A, ubicado en x_A (x_A es negativo) (Ver figura)

$$\begin{aligned} V(x_A) - V(x=d) &= - \int_d^{x_A} \vec{E} \cdot d\vec{x} = - \int_d^0 \vec{E}_2 \cdot d\vec{x} - \int_0^{x_A} \vec{E}_1 \cdot d\vec{x} = \\ &= - \int_d^0 \frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma - \sigma_1 - \sigma_2)\hat{x} \cdot d\vec{x} - \int_0^{x_A} \frac{1}{2\epsilon_0}(-\sigma - \sigma_1 - \sigma_2)\hat{x} \cdot d\vec{x} = \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} [-(\sigma - \sigma_1 - \sigma_2)(0-d) - (-\sigma - \sigma_1 - \sigma_2)x_A] = \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \left[\left(\sigma - \frac{Q}{A_2}\right)d + \left(\sigma + \frac{Q}{A_2}\right)x_A \right] = \frac{1}{2\epsilon_0} \left[-3 \frac{\mu C}{m^2} 0,3m - 1 \frac{\mu C}{m^2} x_A \right] = \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} [-0,9 - x_A] \frac{\mu C}{m} \end{aligned}$$

Para un punto B ubicado en x_B (x_B es negativo)

$$\begin{aligned}
 V(x_B) - V(x=d) &= - \int_d^{x_B} \vec{E}_2 \cdot \vec{dx} = - \int_d^{x_B} \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma - \sigma_1 - \sigma_2) \hat{x} \cdot \vec{dx} = \\
 &= - \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma - \sigma_1 - \sigma_2) (x_B - d) = - \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\sigma - \frac{Q}{A_2} \right) (x_B - d) = \frac{1}{2\epsilon_0} 3 \frac{\mu C}{m^2} (x_B - 0,3)
 \end{aligned}$$

Para un punto C (dentro del conductor) $V(x_C) - V(x=d) = 0$ y para un punto D en x_D

$$\begin{aligned}
 V(x_D) - V(x=d) &= - \int_d^{x_D} \vec{E}_4 \cdot \vec{dx} = 0 - \int_{d+e}^{x_D} \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma + \sigma_1 + \sigma_2) \hat{x} \cdot \vec{dx} = \\
 &= - \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma + \sigma_1 + \sigma_2) (x_D - d - e) = - \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\sigma + \frac{Q}{A_2} \right) (x_D - 0,301m) = \\
 &= \frac{1}{2\epsilon_0} 1 \frac{\mu C}{m^2} (x_D - 0,301m)
 \end{aligned}$$

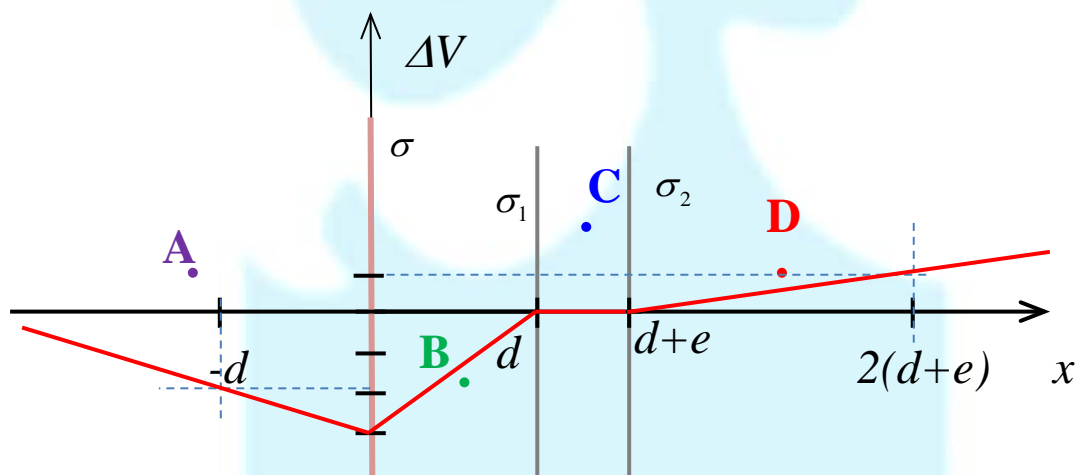
Comprobemos en primer lugar que es continuo. Para eso debemos evaluar en los puntos

$x_A = x_B = -d$ y ver que coinciden:

$$V(x_A = 0) - V(x=d) = \frac{1}{2\epsilon_0} \left[-3 \frac{\mu C}{m^2} (0,3m) \right] = - \frac{1}{2\epsilon_0} 0,9 \frac{\mu C}{m}$$

$$V(x_B = 0) - V(x=d) = \frac{1}{2\epsilon_0} 3 \frac{\mu C}{m^2} (-0,3m) = - \frac{1}{2\epsilon_0} 0,9 \frac{\mu C}{m}$$

Y sobre el conductor: $x_B = 0$ y $x_D = 0$. En ambos casos el resultado es cero. Y ahora, el gráfico



***Notar que los valores de los campos en las superficies conductoras corresponden a la densidad superficial de carga dividido $2\epsilon_0$

2.6 Varias configuraciones con conductores: a trabajar!!!!

En las siguientes configuraciones, la distribución de carga resulta uniforme sobre cada superficie. **Recordar que los conductores siempre tienen** espesor. Analizar por qué esta afirmación es correcta en cada caso. Calcular la distribución de cargas en cada superficie. Justificar. Parecen muchas pero si los hacen a conciencia, todas les parecerán “iguales”.

2.6.1 *Placa maciza en un campo eléctrico uniforme (despreciando efectos de borde: geometría “infinita”)*

2.6.2 *Esfera maciza metálica cargada*

2.6.3 *Cáscara esférica conductora cargada (¿En qué difiere del caso 2.4.2?)*

2.6.4 *Cáscara esférica conductora cargada con una carga puntual q_0 en el centro*

2.6.5 *Dos cáscaras esféricas metálicas concéntricas cargadas con distintas cargas*

2.6.6 *Cáscara cilíndrica conductora cargada (despreciando efectos de borde: geometría “infinita”)*

2.6.7 *Dos cáscaras cilíndricas metálicas concéntricas cargadas con distintas cargas (despreciando efectos de borde: geometría “infinita”)*

2.6.8 *Dos cáscaras cilíndricas metálicas concéntricas cargadas con distintas cargas con una distribución lineal de cargas coincidiendo con los ejes de los cilindros (despreciando efectos de borde: geometría “infinita”)*

2.7 Tema especial3. Puntas agudas en conductores

Ahora vamos a ver por qué los aviones lucen como en la foto siguiente. ¿Para qué se ponen esas puntas en las alas? Haremos un modelo muy sencillo que nos permitirá encontrar el motivo.

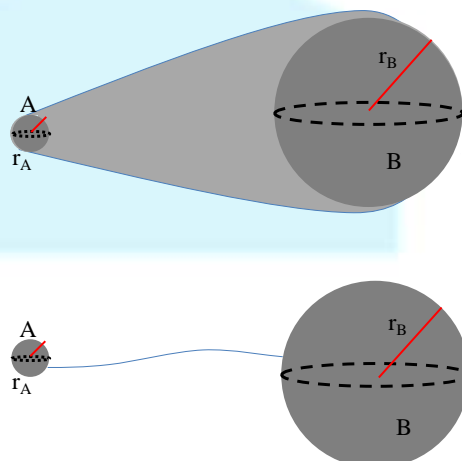


Fig.12. Conductor perfecto de forma irregular

Si tenemos un conductor “irregular” (como el de la fig. 12), podemos caracterizar los extremos A y B por 2 esferitas de radios r_A y r_B siendo $r_B > r_A$. Ahora pensemos sólo en esas dos esferas conductoras con cargas q_A y q_B .

En rigor, no se puede aplicar el principio de superposición “así nomás”. Las fuerzas de atracción o repulsión entre las cargas de A y de B (que por ser conductoras tienen libre movilidad) ocasionarán una “acumulación” de cargas no uniforme sobre las esferas. En consecuencia, el campo y el potencial respecto a cualquier punto fuera de las esferas no serán iguales a los que corresponderían a dos cargas puntuales q_A y q_B . Sin embargo, cada esfera es una superficie equipotencial. Consideraremos que su valor no puede depender de “dónde o cómo” esté distribuida la carga. Esta es también una simplificación del problema. Es decir, como modelo simple, consideramos que la redistribución de cargas al acercar o alejar estas dos esferas metálicas cargadas es despreciable, valiendo en promedio

$$\sigma_A = \frac{q_A}{4\pi r_A^2} \quad \sigma_B = \frac{q_B}{4\pi r_B^2}$$

Así podremos calcular la diferencia de potencial entre cada esfera metálica y algún punto de referencia (por ejemplo, el infinito). Elegiremos al infinito como punto de referencia y le asignaremos el valor cero. Con esa consideración

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow V(r = r_A) &= \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r_A} = \frac{\sigma_A r_A}{\epsilon_0} \\ V(r = r_B) &= \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 r_B} = \frac{\sigma_B r_B}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \text{(respecto del infinito)}$$

Observar que el resultado es idéntico al que se obtiene si se considerara que la carga está en el centro de la esfera y que la referencia del potencial está en el infinito y valiera cero.

Si ahora “conectamos” las dos esferas con un conductor (de cualquier forma), debe valer $V(r = r_A) = V(r = r_B)$. Eso sólo puede ocurrir si

$$\frac{q_A}{r_A} = \frac{q_B}{r_B} \Rightarrow \text{como } q_A = \sigma_A 4\pi r_A^2 \quad \text{y} \quad q_B = \sigma_B 4\pi r_B^2, \text{ resulta}$$

$$\sigma_A r_A = \sigma_B r_B$$

Como $r_A < r_B \Rightarrow \sigma_A > \sigma_B$. Si bien la densidad superficial de carga resulta mayor en la esfera de menor radio, la carga total sobre su superficie resulta menor, es decir, $Q_A < Q_B$

Si volvemos a pensar en nuestro dibujo original, la mayor “cantidad” de cargas estará en el extremo más “agudo”

Sabemos de lo que vimos en 2.1 que el campo eléctrico justo en la superficie de cada conductor vale σ/ϵ_0 donde σ es el valor en ese punto con la aproximación realizada:

$$\frac{E(r = r_A)}{E(r = r_B)} = \frac{\sigma_A}{\sigma_B} > 1$$

En consecuencia, aplicando la propiedad de que el conductor es una superficie equipotencial, en la “punta” de menor radio tanto el campo como la densidad de carga superficial son mayores que en la de mayor radio (y no depende de la carga directamente sino de su densidad superficial)

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \epsilon_0 \frac{V}{r_A} & E(r = r_A) &= \frac{\sigma_A}{\epsilon_0} = V \frac{1}{r_A} \\ \sigma_B &= \epsilon_0 \frac{V}{r_B} & E(r = r_B) &= \frac{\sigma_B}{\epsilon_0} = V \frac{1}{r_B} \end{aligned}$$

⇒ Aunque la diferencia de potencial sea baja, en las zonas de pequeños radios de curvatura, los campos eléctricos pueden ser muy grandes.

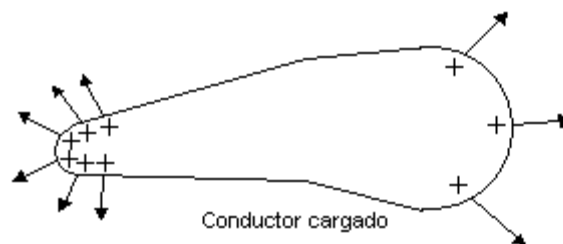


Fig.13. A mayor curvatura mayor número de líneas de campo

Fin tema especial 3

2.8 Cargando metales: las pilas.

En los párrafos anteriores dedicamos mucho tiempo a discutir cómo debían distribuirse las cargas en un conductor cargado. Lamentablemente omitimos hablar sobre un tema muy importante: ¿Cómo obtenemos un metal cargado? La pregunta no es ociosa puesto que la naturaleza siempre nos entrega átomos o moléculas neutros, por lo que nos queda pendiente la cuestión práctica de romper el balance eléctrico del cuerpo para volverlo positivo o negativo. Este desbalance eléctrico lo conseguimos agregando electrones (para tornarlo negativo) o quitándolos (para tornarlo positivo). La carga eléctrica de un cuerpo siempre se resuelve por ganar o perder electrones dado que alterar la carga de los núcleos atómicos involucra energías muy elevadas, propias de reacciones nucleares.

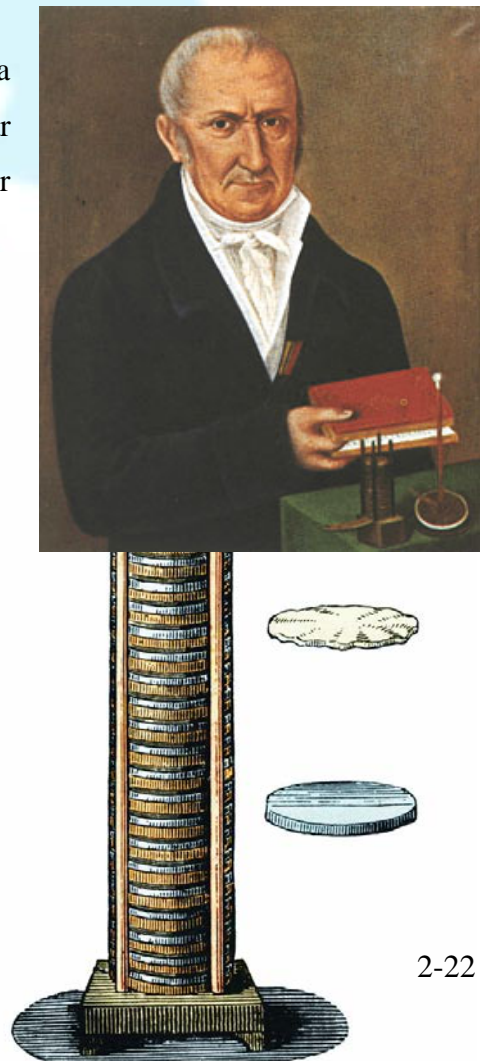
Ahora bien, para que un cuerpo A gane o pierda electrones necesitamos de algún agente que concrete tal transporte entre A y otro/s objetos que intercambien carga con A .

Esta última oración, muy oscura por cierto, es crucial porque manifiesta el principio de conservación de la carga (no la podemos crear ni destruir, sólo transportar). Entonces, si decimos que al objeto A le agregamos una cantidad N de electrones, éstos deben haber sido removidos de otro/s cuerpos para conservar la carga. En todos los párrafos anteriores este tema tuvo relevancia menor, sólo pensábamos que teníamos un objeto cargado y listo, pero ahora le daremos la debida importancia.

En el caso de los metales el medio más simple para concretar el mencionado transporte de cargas es utilizar una pila o batería (antes cargábamos siempre por frotamiento).

Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Gerolamo Umberto Volta (1745-1827) no sólo se caracterizó por tener seis nombres (los padres temían que en el colegio lo confundieran con otro pibe) sino que nos legó la pila o batería, un aparato particularmente apto para transportar electrones (después lo homenajeamos con la unidad de diferencia de potencial eléctrico).

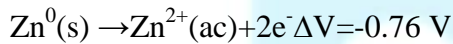
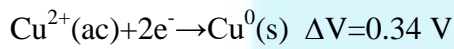
En 1800 Volta, a partir de trabajos de [William Nicholson](#), [Tiberius Cavallo](#), y [Abraham Bennet](#),



presentó su primer modelo de pila, una sucesión de discos de cobre y zinc separados por fieltro mojado en solución acuosa de ácido sulfúrico (no intentar en casa por favor).

En la figura de la derecha se observan los discos de cobre (amarillentos), de fieltro (blanquecinos) y de zinc (grisáceos). Mirando el dibujo entendemos por qué la llamamos “pila”.

Tomando un único grupo podemos describir las reacciones que ocurren como:



La diferencia de potencial total es: $0.34 \text{ V} - (-0.76) \text{ V} = 1.10 \text{ V}$

Al armar una “pila” de N de estos conjuntos se obtiene una diferencia de potencial igual a $1.10 N \text{ V}$.

En términos muy simples decimos que la primera reacción “captura” electrones, dejando al objeto al que está conectado con un déficit de los mismos (es decir positivo). La segunda reacción “libera” electrones, dejando al objeto que los tome con un exceso de los mismos (es decir negativo). Es interesante notar que la pila, vista externamente, opera como un transportador de electrones sobre los que realiza un trabajo.

2.9 Los capacitores

Vamos a poner a este transportador en acción. Tenemos dos objetos metálicos: una llave y una pava que son conectados a una pila. Las líneas negras representan cables conductores.

www.youtube.com/watch?v=MMmtiqyF8Lc



Si bien el transporte ocurre rápidamente nos vamos a tomar tiempo y vamos a pensar que la pila transporta “paquetes” de carga lentamente. Comenzamos con la llave y la pava en condición natural, es decir descargados. Conforme pasa el tiempo, el borne positivo de la pila va “capturando” electrones de la llave mientras que el negativo los “libera” en la pava. En esta situación va apareciendo un campo eléctrico, con líneas de campo que comienzan en la llave y terminan en la pava. En la figura dibujamos en rojo dos de las infinitas líneas de campo.

A medida que los electrones son transportados el módulo del campo eléctrico crece. Es interesante notar que cada “paquete” de carga que es movido requiere de más trabajo porque los electrones son desplazados en la dirección contraria a la que lo harían bajo la acción de la fuerza eléctrica*. El transporte cesa cuando el trabajo por unidad de carga necesario para mover el último “paquete” de carga es igual a la diferencia de potencial de la reacción electroquímica. Esto significa que el campo eléctrico tiene un valor tal que:

$$\int_{pava}^{llave} -\vec{E} \cdot d\vec{l} = V_p$$

La elección del orden de los límites asegura que nos desplazamos “en contra” del campo eléctrico, por lo que debemos obtener un valor positivo que es la diferencia de potencial entre bornes de la pila.

Es importante notar que por cada electrón “liberado” en la pava tenemos otro “capturado” en la llave, de forma tal que podemos afirmar que $Q_{llave} = -Q_{pava}$. Para mayor énfasis: no podríamos tener la pava con un exceso de electrones sin tener al mismo tiempo la llave con un déficit de electrones. La pila de ninguna manera crea carga, solamente la transporta.

Ahora encontraremos un resultado importante. Primero notamos que la forma espacial de las líneas de campo eléctrico entre la llave y la pava es independiente de la cantidad de carga que la pila haya transferido. Asimismo, a partir de la ley de Coulomb sabemos que el módulo del campo eléctrico es proporcional a la carga. Con estas dos ideas y la ecuación anterior llegamos a que hay una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de carga transferida por la pila y la diferencia de potencial entre sus bornes. Definimos así lo que denominamos capacidad eléctrica C como:

$$Q = C V$$

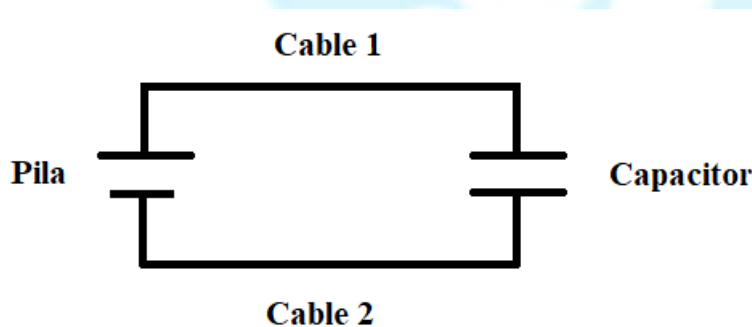
Donde Q es el valor absoluto de la carga de la llave o la pava (son iguales y de signo contrario) y V la diferencia de potencial entre ambos objetos (también en valor absoluto).

La unidad de capacidad eléctrica se llama Faradio (F) en homenaje a Michael Faraday y corresponde a un par de objetos tal que la carga almacenada en cualquiera de ellos es de 1 C cuando la diferencia de potencial entre ambos es de 1 V.

Largo tiempo atrás se solía decir que un Faradio era una capacidad demasiado grande y que lo “normal” era trabajar con valores mucho más pequeños, del orden de micro Faradios (μF) por ejemplo. La técnica avanza y eso ya no es cierto; miren este video para no cometer errores:

www.youtube.com/watch?v=EoWMF3Vki6U

Necesitamos un ícono para representar de manera abstracta al capacitor sin necesidad de dibujar exactamente la forma concreta de los objetos que lo conforman. Dicho ícono son dos líneas paralelas como muestra la figura. Cada una de las líneas es uno de los objetos que consideramos. También agregamos el ícono abstracto de la pila para completar la representación de todos los objetos de la figura con la llave y la pava. Notar los largos diferentes de las líneas en la pila; el más largo es el borne positivo.



El cómputo de la capacidad para un par arbitrario de objetos suele ser complicado porque desconocemos la forma de las líneas de campo. Por el contrario, en algunos casos simples (¿adivinan cuáles son?), conocemos de antemano la dirección de las líneas y el cómputo se simplifica mucho.

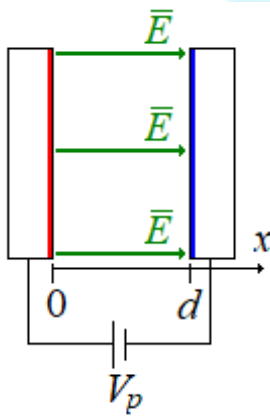
La estrategia es siempre la misma: primero suponemos que, como resultado de conectar la pila, uno de los objetos tiene carga Q y el otro $-Q$ (por ahora desconocidas). A partir de esto calculamos el campo eléctrico correspondiente (que depende linealmente con Q). Como último paso exigimos que la circulación del campo eléctrico entre ambos objetos iguale a la diferencia de potencial de la pila.

Comenzamos, como ejemplo, con dos placas planas paralelas de superficie S y separadas una distancia d . La forma de las mismas no importa en la medida en que la dimensión

característica de las mismas sea mucho más grande que d , así aseguramos que podamos tratar a las placas como de dimensión infinita.

Este problema ya lo tratamos más arriba y sabemos que la distribución estática de cargas es como la que indica la figura, con una densidad superficial uniforme $\sigma=Q/S$.

También de los ejemplos anteriores sabemos que el campo eléctrico asociado con dicha distribución de carga es: $\vec{E} = (\sigma/\epsilon_0)(\hat{i})$ (apunta en la dirección normal a la placa)



Ahora integramos (ver figura previa) desde la placa que se encuentra en $x=d$ hasta la otra $x=0$. Vamos en contra de las líneas de campo, así obtenemos una diferencia de potencial positiva (igual a la de la pila).

$$V_p = -\int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_d^0 (\sigma/\epsilon_0)(\hat{i}) \cdot dx(\hat{i}) = \sigma d/\epsilon_0$$

¡¡¡CUIDADO!!! Aunque vamos de derecha a izquierda, dx NO es negativo, el tema signos está contemplado en los límites de la integral.

Ahora multiplicamos y dividimos por el área S de la placa; tenemos así la expresión en términos de la carga Q .

$$V_p = \sigma S d / S \epsilon_0 = Q d / S \epsilon_0 \Rightarrow Q = (S \epsilon_0 / d) V_p$$

El término $(S \epsilon_0 / d)$ es la capacidad eléctrica buscada.

Puede notarse que, dado el pequeño valor ϵ_0 , la capacidad tiende a ser pequeña a menos que el cociente S/d sea muy grande. Más adelante veremos cómo, al reemplazar el vacío entre las placas por un material aislante, podemos obtener capacidades más grandes. La capacidad depende de factores geométricos (forma, tamaños) y, según veremos más adelante, de los materiales aislantes que coloquemos entre las placas.

El capacitor existe por el mero hecho de tener los objetos, se encuentren éstos cargados o no. Un error común es el de afirmar que el capacitor “aparece” cuando está cargado. Es fácil ver que la razón Q/V es siempre la misma constante y sólo depende de aspectos geométricos.

2.9.1 Quedan dos casos simples a resolver:

- Calcular la capacidad de un sistema formado por un cilindro metálico de radio a y otro cilindro metálico, concéntrico con el primero, de radios b (interno) y c (externo) ($a < b < c$). Ambos cilindros tienen un largo $L \gg a, b, c$.
- Ídem para un sistema formado por una esfera metálica de radio a y otra esfera metálica, concéntrica con la primera, y de radios b (interno) y c (externo).

¿Qué sucede si tenemos más de dos objetos? La respuesta es que podemos extender el concepto de capacidad tomando los objetos de a pares. Definimos C_{ij} ($i \neq j$) como la capacidad entre el objeto i y el j . En general este cálculo es muy difícil salvo para unos pocos casos simplificados. Nosotros nos mantendremos dentro del concepto simple original.

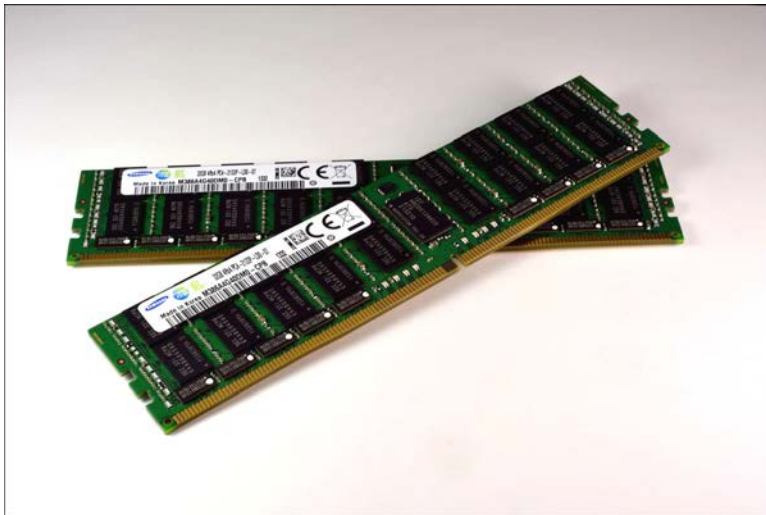
2.9.2 ¿Para qué sirven los capacitores?

Vamos a contar dos ejemplos muuuuuuuuuuuuy simplificados porque la tecnología que hay detrás es muy compleja, resultado de una cantidad gigantesca de horas-persona de trabajo e inversiones multi millonarias.

La memoria de la computadora.

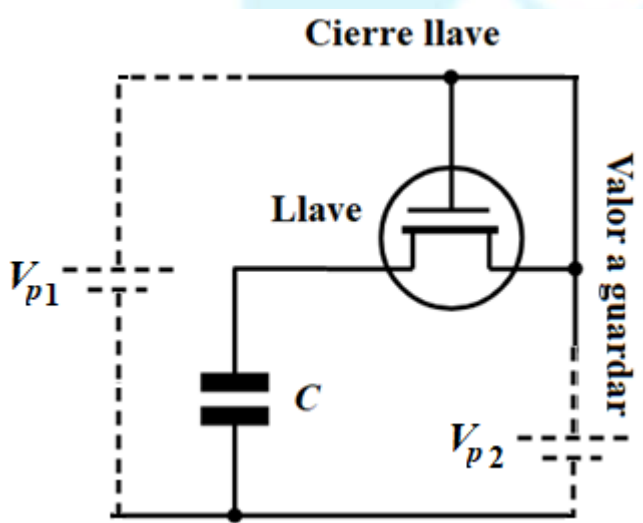
En este momento estoy escribiendo en una computadora con 8 GB de memoria (marzo 2020). No es ni mucho, ni poco. La letra G es por giga (10^9) y B es por byte. Un byte está formado por 8 bits. Un bit es la unidad elemental de información que la representamos por un **1** o un **0**. Entonces, mi computadora es capaz de guardar unas 64×10^9 unidades elementales de información. La siguiente figura muestra las memorias de mi computadora. Miden 14 cm de largo, 3 cm de alto y 6 mm de espesor. Los contactos dorados las conectan con el resto de la computadora.

Sólo los rectángulos negros son las memorias (y la parte útil está adentro y es más pequeña).



En 1970 Intel presentó la primera memoria útil basada en capacitores y cuya unidad elemental, muy simplificada, aparece en la siguiente figura.

El capacitor C estará en dos estados: cargado, en cuyo caso interpretamos que equivale a un **1** y descargado, que lo interpretamos como **0**.



Las “pilas” V_{p1} y V_{p2} son circuitos complicados y sus valores pueden ser 1.5 V (**1**) ó 0V (**0**) cada una de forma independiente. Cuando $V_{p1}= 1.5$ V la llave se cierra y conecta a C con V_{p2} . Si ahora $V_{p1}= 0$ V la llave se abre y C ha quedado cargado con la carga transferida por V_{p2} , es decir que ha “memorizado” el valor. Hemos guardado un **1** o un **0**.

Vamos a saltarnos la parte de lectura del valor guardado porque sólo queríamos presentar la idea y no abrumar con detalles. Síntesis: la memoria de la computadora o el teléfono usa capacitores para almacenar datos.

La pantalla del teléfono

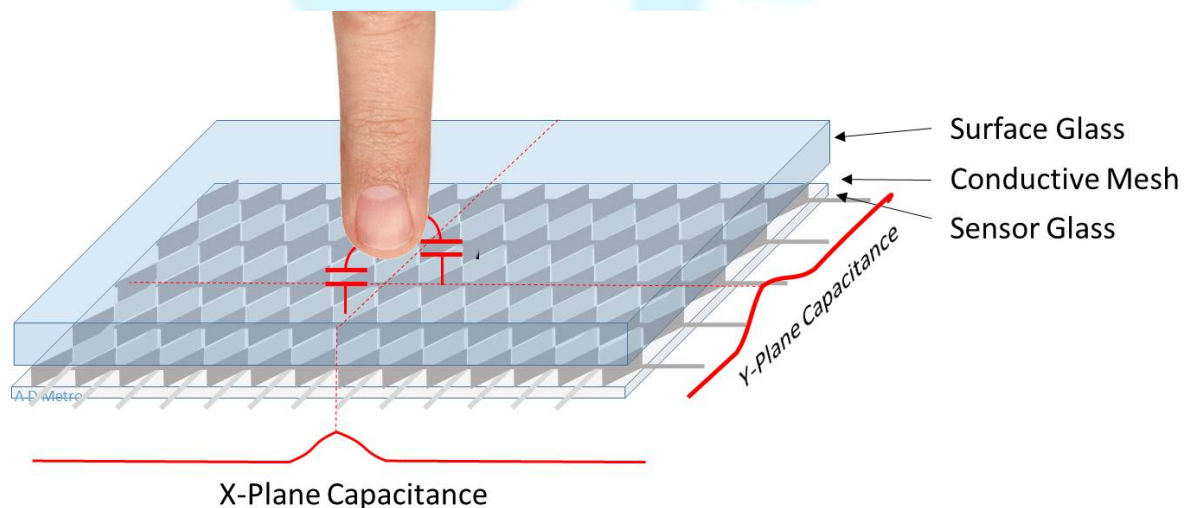
Los intentos de hacer una interfaz táctil con la computadora son tan antiguos como de 1965. A lo largo del tiempo aparecieron varias soluciones ingeniosas que tuvieron mayor o menor éxito comercial, pero ninguna tan generalizada como la pantalla capacitiva que introdujo Apple en el primer iPhone de 2007. Vamos a contar un tipo de pantalla, no podemos asegurar en qué teléfono se usa porque hay secretos comerciales de por medio.

Resulta que el vidrio del teléfono no es un vidrio común. Es extremadamente resistente (se llama GorillaGlass y es producido por Corning Glass). Por debajo de este vidrio (Surface Glass) hay otra capa de vidrio (Sensor Glass) que tiene depositadas, sobre sus caras, dos finísimas estructuras metálicas (rombos claros y oscuros) transparentes a la luz (se pueden hacer metales transparentes).

Los rombos claros y oscuros son las placas de muchos capacitores; cuando tocamos con el dedo agregamos un extra de capacidad (ver figura) que aparece en una coordenada en el eje X y en otra coordenada en el eje Y. A partir de este dato, el procesador distingue dónde pusimos el dedo.

¿Tenemos dedos metálicos de robot? No, pero la superficie del dedo siempre está húmeda y con suciedad que es conductora, así que igual sirve para formar un capacitor extra entre el dedo y las estructuras con forma de rombo que están abajo del vidrio principal.

Por supuesto que faltan muchos detalles, tanto en el caso de la memoria como en el del teléfono, pero queríamos contar dos usos posibles de los capacitores.



2.9.3 El trabajo necesario para cargar un capacitor.

En párrafos anteriores adelantamos la idea que al cargar un capacitor el agente que transporta las cargas realiza un trabajo. Vamos ahora a calcularlo.

La figura muestra un capacitor mientras es cargado. En el momento en el que lo observamos la cantidad de carga acumulada es Q e imaginamos que el agente externo la incrementa en dQ . Si la carga del capacitor es Q entonces la diferencia de potencial entre sus placas es: $V=Q/C$. Para agregar el extra de carga dQ el agente externo debe realizar un trabajo $dW=VdQ$ (recordar definición de diferencia de potencial). Para calcular la cantidad total de trabajo realizado “sumamos” los aportes infinitesimales.

$$W = \int_0^Q V dQ = \int_0^Q (Q/C) dQ = Q^2 / 2C = QV / 2 = CV^2 / 2$$

Como el agente realizó trabajo contra la fuerza eléctrica, que es conservativa, el trabajo realizado queda almacenado en el sistema (capacitor), listo para ser recuperado más tarde (<https://www.youtube.com/watch?v=-K3PTlybroc>). En este caso conviene recordar un caso análogo. Al comprimir o expandir una distancia d un resorte de constante elástica k se realiza un trabajo $W=kd^2/2$. Este trabajo, también realizado contra fuerzas conservativas, queda almacenado en el sistema.

2.9.4 Tema especial 4. La fuerza entre placas de un capacitor.

Si tenemos un capacitor cargado esperamos que exista una fuerza de atracción eléctrica entre ambas. Esta fuerza de atracción determina un esfuerzo mecánico sobre las placas que puede llegar a ser muy grande y deformarlas. Esta deformación se explota en los llamados sistemas micro electro- mecánicos (<https://www.youtube.com/watch?v=CNmk-SeM0ZI>)

Vamos a calcular la fuerza a partir de la siguiente estrategia: pensamos que alteramos la distancia d entre placas en una pequeña cantidad δd . Al desplazar las placas la energía almacenada cambiará en una cantidad en una cantidad δW . Igualamos esta cantidad al producto de una fuerza desconocida por el desplazamiento: $\delta W = F \delta d$. Formamos la razón $\delta W / \delta d$ y luego tomamos el límite en el que δd tiende a cero. Con esto obtenemos la fuerza buscada.

Primer caso. Un capacitor a carga constante Q .

La energía almacenada cuando la distancia entre placas es d vale: $U=Q^2/2C(d)$; al incrementar la distancia pasa a ser $U'=Q^2/2C(d+\delta d)$. Calculamos la energía en términos de la carga porque ésta permanece constante. Así obtenemos:

$$\delta U = U' - U = \frac{Q^2}{2} \left[\frac{1}{C(d+\delta d)} - \frac{1}{C(d)} \right] = \frac{Q^2}{2} \left[\frac{C(d) - C(d+\delta d)}{C(d+\delta d)C(d)} \right]$$

$$\delta U \approx \frac{Q^2}{2} \left[\frac{C(d) - \left(C(d) + \frac{\partial C}{\partial d} \delta d \right)}{C^2(d)} \right] \approx \frac{Q^2}{2} \frac{-\frac{\partial C}{\partial d} \delta d}{C^2(d)}$$

El segundo renglón contiene dos aproximaciones. En el denominador consideramos que el producto $C(d)C(d+\delta d)$ lo podemos expresar como $C^2(d)$. En el numerador expandimos $C(d+\delta d)$ como una serie de Taylor alrededor de $C(d)$ truncada a primer orden.

La variación de energía la expresamos como el producto de la fuerza ejercida para separar las placas por la distancia recorrida: $\delta U = F \delta d$. Entonces obtenemos $F = - \left[Q^2 / 2C^2(d) \right] (\partial C / \partial d)$

Vamos a aplicar este resultado a un capacitor plano de placas de área S . En párrafos anteriores calculamos que $C = \epsilon_0 S / d$, por lo que $\partial C / \partial d = -\epsilon_0 S / d^2$. La fuerza resulta entonces: $F = Q^2 / 2\epsilon_0 S$.

Segundo caso. Un capacitor a diferencia de potencial constante

Este caso es conceptualmente más difícil puesto que para mantener la diferencia de potencial constante es necesario que incorporemos otro actor: una pila que satisfaga dicha condición. Esto hace que al mover imaginariamente las placas del capacitor debamos tomar en consideración la transferencia de carga entre el capacitor y la pila. En la condición inicial la energía guardada en el capacitor es:

$U = C(d)V^2/2$. Ahora computamos la energía en términos de la diferencia de potencial porque ésta es constante.

Al aumentar la distancia entre placas tenemos:

$$U' = C(d+\delta d) V^2/2$$

$$\delta U = U' - U = \frac{V^2}{2} [C(d+\delta d) - C(d)]$$

$$\delta U \approx \frac{V^2}{2} \left[C(d) + \frac{\partial C}{\partial d} \delta d - C(d) \right] \approx \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial d} \delta d$$

Donde hemos utilizado las mismas aproximaciones que en el caso anterior.

Ahora nos enfrentamos con una paradoja importante. Si ampliamos la distancia entre placas ($\delta d > 0$) la energía almacenada en el capacitor disminuye y entonces $\delta U < 0$. ¿Cómo podemos tener este resultado? Claramente nos cuesta trabajo apartar las placas porque se atraen electrostáticamente y sin embargo la cantidad de energía almacenada en el capacitor disminuye. ¿Dónde está el error?

La respuesta es sutil e involucra el intercambio de carga entre el capacitor y la pila.

En la condición inicial la carga vale: $Q = C(d) V$. Al separar las placas tenemos $Q' = C(d + \delta d) V$. Esto implica un cambio

$$\delta Q = Q' - Q = [C(d + \delta d) - C(d)] V$$

$$\delta Q \approx \left[C(d) + \frac{\partial C}{\partial d} \delta d - C(d) \right] V \approx \frac{\partial C}{\partial d} \delta d V$$

Por lo que hemos analizado antes $\delta Q < 0$ cuando $\delta d > 0$. Esta cantidad de carga vuelve del capacitor a la pila y ésta recibe una cantidad de trabajo $\delta W = -\delta Q V$ (el menos es porque sale carga del capacitor pero entra a la pila). Si ahora sumamos la variación de energía del capacitor y el trabajo entregado a la pila (cantidad total de trabajo realizado) obtenemos:

$$\delta U + \delta W = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial d} \delta d - V^2 \frac{\partial C}{\partial d} \delta d = -\frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial d} \delta d$$

Ahora tenemos el signo correcto. Al alejar las placas realizamos trabajo, la energía almacenada en el capacitor disminuye pero la pila recibe trabajo, dándonos un total positivo.

Retomando el mismo método de la sección anterior calculamos una fuerza:

$$F = -\frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial d}$$

*Si alguien encuentra contradictoria esta afirmación con la que dice que el trabajo que realiza la pila por unidad de carga movida es constante, está totalmente en lo cierto. La resolución de esta contradicción es compleja y la dejamos para más adelante.

Fin tema especial 4
